Στατ. Συμπερ 12/4

Μέθοδος Lehmann-Scheffe

1) Εύρεση επαρκούς και πλήρους στατιστικού

2) εύρεση μιας συνάρτησης του επαρκούς και πλήρους που εκτιμά αμερόληπτα την προς εκτίμηση συνάρτηση της θ

Παράδειγμα

Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από πληθυσμό $U(0,\theta)$ $\theta>0$. Να βρεθεί ΑΟΕΔ εκτιμητής της θ

Λύση

(Μιας και το πεδίο θετικότητας εξαρτάται από το θ δεν ικανοποιούνται οι συνθήκες κανονικότητας άρα δεν μπορώ να χρησιμοποιήσω Cramer-Rao)

1° Βήμα

Το $T=X_{(n)}$ επαρκές στατιστικό θ.ν.δ.ο. το $T=X_{(n)}$ είναι πλήρες

Αρκεί νδο Αν $E[\varphi(T)]=0 \ \forall\theta>0 \implies \varphi(t)=0 \ \forall t$

$E[\varphi(T)]=0 \implies \int \varphi(t) f_T(t)\,dt=0$

Θέλω να βρω την κατανομή του T

$F_T(t) \overset{\text{ορ}}{=} P(T\le t) = P(X_{(n)}=\max\{X_1,\dots,X_n\}\le t) =$

$= P(X_i \le t, \forall i=1,\dots,n) = P_n(X_1\le t, \dots, X_n \le t) \underset{\text{ανεξ}}{\overset{X_1,\dots X_n}{=}}$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \le t) \overset{\text{αρ}}{=} \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(t) \xrightarrow[\text{ισόνομα } U(0,\vartheta)]{X_1,\dots,X_n} [F_X(t)]^n$$

$$f_T(t) = \frac{d}{dt} F_T(t) = n[F_X(t)]^{n-1} \cdot f_X(t)$$

Επειδή $X \sim U(0,\vartheta)$ $\quad F_X(t) = \frac{t}{\theta}, \ 0<t<\vartheta$ και $f_X(t) = \frac{1}{\vartheta}, \ 0<t<\vartheta$

Άρα $f_T(t) = n\left(\frac{t}{\theta}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\theta}, \ 0<t<\vartheta$

$$f_T(t) = \frac{nt^{n-1}}{\theta^n}, \ 0<t<\theta$$

$$E[\varphi(T)] = 0 \ \forall \vartheta>0 \Rightarrow \int_0^{\vartheta} \varphi(t) f_T(t)\,dt = 0 \ \forall \vartheta>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\vartheta} \varphi(t) \frac{nt^{n-1}}{\theta^n}\,dt = 0 \ \forall \vartheta>0 \Rightarrow \int_0^{\vartheta} \varphi(t)\, t^{n-1}\,dt = 0 \ \forall \vartheta>0 \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{\text{ΑΠ2}} \frac{d}{d\theta}\int_0^{\theta} \varphi(t)\, t^{n-1}\,dt = 0 \ \forall \vartheta>0 \overset{\text{ΑΠ2}}{\Rightarrow} \varphi(\theta)\,\theta^{n-1} = 0 \ \forall \vartheta>0$$

$$\Rightarrow \varphi(\vartheta) = 0 \ \forall \theta>0 \quad \text{ή} \quad \varphi(t) = 0 \ \forall t>0$$

Συνεπώς $T = X_{(n)}$ επαρκές και πλήρες

<u>2ο Βήμα</u>

$$E(T) = \int_0^{\theta} t f_T(t)\,dt = \int_0^{\vartheta} t \frac{nt^{n-1}}{\theta^n}\,dt = \frac{n}{\theta^n}\int_0^{\vartheta} t^n\,dt =$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_0^{\theta} = \frac{n}{\theta^n}\frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1}\theta$$

Άρα $E\left(\frac{n+1}{n} T\right) = \vartheta$

Συνεπώς το $\frac{n+1}{n} T = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$ ΑΟΕΔ της ϑ.

Παρατήρηση

Ζητώ συνάρτηση του επαρκούς και πλήρους που είναι αμερόληπτη της θ. Έστω $S(T)$ μια τέτοια συνάρτηση. Αφού αυτή η $S(T)$ αμερόληπτη της θ $E[S(T)]=\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^\theta S(t) f_T(t)\,dt = \theta \Rightarrow \int_0^\theta S(t) \frac{n t^{n-1}}{\theta^n}\,dt = \theta \Longrightarrow$$

$$\int_0^\theta S(t)\, t^{n-1}\,dt = \frac{\theta^{n+1}}{n} \Longrightarrow \frac{d}{d\theta}\int_0^\theta S(t)\, t^{n-1}\,dt = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\theta^{n+1}}{n}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(\theta)\theta^{n-1} = (n+1)\frac{\theta^n}{n} \Rightarrow S(\theta) = \frac{n+1}{n}\cdot\theta$$

Άρα $S(T) = \dfrac{n+1}{n}\cdot T$

Μπορώ να χρησιμοποιήσω και αυτόν τον τρόπο εύρεσης της συνάρτησης όμως μόνο όταν η κατανομή μου εξαρτάται από το θ. Εδώ π.χ. $U(0,\theta)$

Παράδειγμα

Έστω $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από $Εκθ\left(\frac{1}{\theta}\right)$, $\theta>0$. Να βρεθεί ΑΟΕΔ εκτιμητής της θ^2

Λύση

$$f(\underline{x},\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i,\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} e^{-x_i/\theta} = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i}$$

$f(\underline{x},\theta) = q[T(\underline{x}),\theta]\, h(\underline{x})$ όπου $h(x)=1$

και $q[T(\underline{x}),\theta] = \dfrac{1}{\theta^n} e^{\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i}$

Το $T=\sum_{i=1}^n X_i$ επαρκές

Αρκεί νδο T πλήρες δηλαδή $E[\varphi(T)]=0 \ \forall\theta \Rightarrow \varphi(t)=0 \ \forall t$

Απαιτείται η κατανομή T

Με την μέθοδο της ροπογεννήτριας βρίσκω $T=\sum_{i=1}^{n} X_i \sim G(n,\theta)$ (βλέπε 1ο μάθημα)

$$f_T(t)=\frac{1}{\theta^n\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-t/\theta}, \quad t>0$$

$$E(\varphi(T))=0, \ \forall\theta>0 \Rightarrow \int_0^\infty \varphi(t)\frac{1}{\theta^n\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-t/\theta}\,dt=0, \ \forall\theta>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^\infty \varphi(t)\,t^{n-1}e^{-t/\theta}\,dt}_{\text{μετασχηματισμός Laplace (μ.L)}}=0 \quad \forall\theta>0$$

Επειδή ο μ.L της $\varphi(t)t^{n-1}$ είναι 0 $\varphi(t)t^{n-1}=0, \ \forall t>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(t)=0, \ \forall t>0$

Άρα $T=\sum_{i=1}^{n} X_i \sim G(n,\theta)$ είναι επαρκές και πλήρες.

$E(T)=n\theta$

$$\left.\begin{array}{l} Var(T)=n\theta^2 \\ Var(T)=E(T^2)-(ET)^2 \end{array}\right\} E(T^2)-(ET)^2=n\theta \Rightarrow E(T^2)-(n\theta)^2=n\theta^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(T^2)=n\theta^2+n^2\theta^2 \Rightarrow E(T^2)=n(n+1)\theta^2 \Rightarrow E\left(\frac{1}{n(n+1)}T^2\right)=\theta^2$$

Άρα το $\frac{1}{n(n+1)}T^2$ είναι ΑΟΕΔ της θ^2

Άσκηση (για το σπίτι)

Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από την κατανομή Laplace με σ.π.π

$f(x, \theta) = e^{-(x-\theta)}$, $x \geq \theta > 0$. Νδο $X_{(1)}$ είναι επαρκές και πλήρες.

Συνέπεια Εκτιμητών

Παρατηρήσαμε ότι οι εκτιμητές ($n \cdot \bar{x}$ $\sum X_i$, $X_{(n)}, \dots$) εξαρτώνται από το μέγεθος του δείγματος. Παρουσιάζει ενδιαφέρον η μελέτη εκτιμητή ως προς το μέγεθος του δείγματος.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω τ.δ. $X_1, \dots, X_n$ από πληθυσμό με κατανομή $f(x, \theta)$ $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$. Έστω $T_n(X_1, \dots, X_n)$ εκτιμητής της $g(\theta)$. Τότε ο $T_n(X_1, \dots, X_n)$ ή η ακολουθία εκτιμητών $T_n(X_1, \dots, X_n)$ $n \geq 1$ λέγεται συνεπής εκτιμητής της $g(\theta)$ αν:

$$P\left(|T_n(X_1, \dots, X_n) - g(\theta)| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \ , \quad \varepsilon > 0$$

$\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}$

Ο εκτιμητής $T_n = T_n(X_1, \dots, X_n)$ είναι συνεπής για την $g(\theta)$ αν i) $E(T_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} g(\theta)$

ii) $Var(T_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$\boxed{\text{Απόδειξη}}$

Ανισότητα Markov: Αν ω μια τ.μ. τότε $P(|\omega| > \varepsilon) = \dfrac{E(\omega^2)}{\varepsilon^2}$ $\quad \varepsilon > 0$

Εφαρμόζω $\omega = T_n - g(\theta)$ και έχω:

$$P(|T_n - g(\theta)| > \varepsilon) \leq \frac{E(T_n - g(\theta))^2}{\varepsilon^2} = \frac{Var(T_n - g(\theta)) + (E(T_n - g(\theta)))^2}{\varepsilon^2} =$$

$$= \frac{Var(T_n) + (E(T_n - g(\theta)))^2}{\varepsilon^2}$$

~~[illegible]~~ για $n \to \infty$: $Var(T_n) \longrightarrow 0$

$(E(T_n - g(\theta)))^2 \longrightarrow 0$

Άρα $P|\,|T_n - g(\theta)| > \varepsilon\,| \leq 0$

Όμως από ορισμό πιθανότητας $P(|T_n - g(\theta)| > \varepsilon| \geq 0 \Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow P(|T_n - g(\theta)| > \varepsilon| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Παράδειγμα

1) Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από $N(\mu, \sigma^2)$. Ν δο $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$ συνεπής της θ^2

Λύση

Αρκεί νδο (i) $E(S^2) \xrightarrow[n \to \infty]{} \sigma^2$

(ii) $Var(S^2) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Δείξαμε ότι για κάθε πληθυσμό ότι $E(S^2) = \sigma^2$

Άρα ικανοποιείται το (i)

Θέλω να βρω $Var(S^2) = ?$

Αν έχω τ.δ από $N(\mu, \sigma^2)$ τότε $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

Άρα $Var\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = Var(\chi^2_{n-1}) = 2(n-1)$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)^2}{(\sigma^2)^2} Var(S^2) = 2(n-1) \Rightarrow Var(S^2) = \frac{2(\sigma^2)^2}{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

2) Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από $U(0,\theta)$, $\theta > 0$. Νδο $X_{(n)}$ συνεπής θ.

<u>Λύση</u>

Αρκεί $E(X_{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$ και $Var(X_{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Έχουμε βρει ότι $f_{X_{(n)}}(x) = \frac{n}{\theta^n} x^{n-1}$, $0 < x < \theta$

$$E(X_{(n)}) = \int_0^\theta x f_{X_{(n)}}(x)dx = \int_0^\theta x \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} dx = \frac{n}{n+1}\theta = \frac{1}{1+1/n}\theta$$

Άρα $E(X_{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$

$$\left.\begin{aligned} &Var(X_{(n)}) = E(X_{(n)}^2) - (EX_{(n)})^2 \\ &E(X_n^2) = \int_0^\theta x^2 \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} dx = \frac{n}{n+2}\theta^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Var(X_{(n)}) = \frac{(2n+3)n^2}{(n+1)^2(n+2)^2}\theta^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$